

اتفاذهای جبری

به نام خدا

در این جلسه میفوییم درباره اتفاذهای جبری با هم صحبت کنیم:

فرض کنید دو تا عبارت جبری داریم که به ازای هر مقداری که به متغیرهاشون میدیم، نتیجه یکسان به ما برمیگردونن، به این برابری بین دو عبارت، اتفاق جبری می‌گیم.

دو تا عبارت زیر رو در نظر بگیرید:

$$2x(x - 1) \quad , \quad 2x^2 - 2x$$

در اینجا هر عددی که به x بدیم، مقدار دو عبارت برابر میشه:

$$x = 1$$

$$2x(x - 1) = 2 \times 1(1 - 1) = 2 \times 0 = 0$$

$$2x^2 - 2x = 2 \times 1^2 - 2 \times 1 = 2 - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$2x(x - 1) = 2 \times 2(2 - 1) = 4 \times 1 = 4$$

$$2x^2 - 2x = 2 \times 2^2 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4$$

هر عدد دیگه ای هم که به جای x بذاریم، مقدار دو عبارت برابر میشه. پس بین این دو عبارت جبری اتفاق وجود داره.

قبل از اینکه ادامه مطالب مربوط به اتحادها رو بگیریم، یه یادآوری کوچیک داشته باشیم؛
 وقتی یه پرانتز به توان میرسه یعنی چی؟ یعنی پرانتز به تعداد عدد توان، در خودش ضرب شده.

$$(\dots)^2 = (\dots) \times (\dots)$$

$$(\dots)^3 = (\dots) \times (\dots) \times (\dots)$$

$$(\dots)^4 = (\dots) \times (\dots) \times (\dots) \times (\dots)$$

حالا میفوییم بدونیم اتحادها به چه دردی میخورن؟ چه اهمیتی داره دو تا عبارت مقدار یکسانی برگردونن یا نه؟ 😊

اتحادها اومدن که کار ما رو راحت کنن، اونا میتونن کاری کنن که ما محاسبات کمتری انجام بدیم. البته همه اتحادها نه ها! اتحادهای معروف.

بریم ببینیم اتحادها چطوری به ما کمک میکنن؟ 😊

حاصل عبارت زیر رو به دست بیارید:

$$(a + 4)^2 =$$

چون پرانتز به توان ۲ رسیده، پس باید دو بار در خودش ضرب شه:

$$(a + 4)^2 = (a + 4) \times (a + 4) =$$

برای ضرب این عبارت‌ها، همونطور که قبلاً یاد گرفتیم، باید هر کدوم از جملات پرانتز اول رو، در تک تک جملات پرانتز دوم ضرب کنیم و با هم جمع کنیم، یعنی به بار a و یه بار ۴ در جملات پرانتز دوم ضرب میشه:

$$[(a \times a) + (a \times 4)] + [(4 \times a) + (4 \times 4)] =$$

$$a^2 + 4a + 4a + 16 =$$

دو تا جمله متشابه داریم، یعنی دو تا جمله که قسمتهای عرضی‌شان با هم برابر، پس دو تا جمله رو با هم جمع می‌کنیم:

$$a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$$

بنابراین:

$$(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$$

به مثال دیگه:

$$(a + b)^2 =$$

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) =$$

$$[(a \times a) + (a \times b)] + [(b \times a) + (b \times b)] =$$

$$a^2 + ab + ba + b^2 =$$

در اینجا هم جملات ab و ba متشابه هستن پس با هم جمعشون می‌کنیم:

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

بنابراین:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

دو تا مثال حل کردیم که هر کدوم چندین فط مناسبه داشتن.

حالا فرض کنید یه نفر میاد به شما میگه، هر وقت یه پرانتز داشتید که توی اون دو تا جمله با هم جمع شده بودن (یا از هم کم شده بودن) و اون پرانتز به توان ۲ رسیده بود، میتونید از فرمولهای زیر استفاده کنید:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اگه واقعا بتونيم از اين فرمولها استفاده كنيم فيلي كارمون راحت ميشه، ديگه نيازي نيست هي پرانتزا رو در هم ضرب كنيم و جمع كنيم و

اين اتقارها چي به ما ميگه؟

ميگه اگه دو تا جمله با هم جمع شده بودن و به توان ۲ رسیده بودن، جواب به اين صورت به دست مياد:

$$\text{جمله دوم}^2 + 2(\text{جمله اول}) + \text{جمله اول}^2$$

اينجوري حفظ كنيد:

جمله اول به توان ۲ باضافه دو برابر جمله اول در دوم باضافه جمله دوم به توان ۲

و اگه دو تا جمله منها شده بودن و به توان ۲ رسیده بودن، جواب به اين صورت به دست مياد:

$$\text{جمله دوم}^2 + 2(\text{جمله اول}) - \text{جمله اول}^2$$

يعني اگه علامت توي پرانتز منها باشه، علامت جمله وسط در سمت راست هم منفي ميشه

حالا دو تا مثالي كه در قسمت قبل با مناسبه به دست آورديم، با استفاده از اتقار حل كنيم:

$$(a + 4)^2 =$$

جمله اول به توان ۲: a^2

دو برابر جمله اول در دو^م: $2 \times a \times 4 = 8a$

جمله دو^م به توان ۲: $4^2 = 16$

حالا همه این جملات رو با هم جمع می‌کنیم ببینیم با جوابی که قبلا به دست آوردیم برابر همیشه یا نه:

$$a^2 + 8a + 16$$

همینطور که می‌بینید، این دقیقا همون جوابیه که در قسمت قبل با انجام دادن مقاسبات طولانی تر به دست آوردیم.

جوابهای زیر را با توجه به اتحاد اول به دست آورید:

$$(x + y)^2 =$$

جمله اول چیه؟ x

جمله دو^م چیه؟ y

عبارتهایی که لازم داریم با هم جمع کنیم:

جمله اول به توان ۲: x^2

دو برابر جمله اول در جمله دو^م: $2xy$

جمله دو^م به توان ۲: y^2

حالا این جملات رو با هم جمع می‌کنیم:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

بنابراین:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

می بینید که آگه اتحادها رو حفظ باشیم، مناسباً تمون فیلی فیلی کم میشه.

یه مثال دیگه:

$$(5x + 2)^2 =$$

جمله اول چیه؟ $5x$

جمله دوم چیه؟ 2

عبارت‌توایی که لازم داریم با هم جمع کنیم:

$$(5x)^2 = 25x^2$$

جمله اول به توان ۲:

$$2 \times (5x) \times 2 = 20x$$

دو برابر جمله اول در جمله دوم:

$$2^2 = 4$$

جمله دوم به توان ۲:

حالا این جملات رو با هم جمع می‌کنیم:

$$25x^2 + 20x + 4$$

بنابراین:

$$(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$$

مثال:

$$(5x - 2)^2 =$$

اینو با علامت مثبت در قسمت قبل حل کردیم. بدون اینکه دوباره محاسبات رو انجام بدیم میفوایم جواب رو بنویسیم، جوابی که برای علامت مثبت نوشتیم این بود:

$$(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$$

اینو الان باید چه تغییری بدیم که جواب رو به دست بیاریم؟

چون علامت بین جمله های سمت چپ منفیه، پس عبارت سمت راست هم باید جمله دومش منفی باشه:

$$(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$$

یه مثال دیگه:

$$(2x - a)^2 =$$

جمله اول چیه؟ $2x$

جمله دوم چیه؟ a

عبارتهایی که لازم داریم با هم جمع کنیم:

$$(2x)^2 = 4x^2$$

جمله اول به توان ۲:

$$2 \times (2x) \times a = 4ax$$

دو برابر جمله اول در جمله دوم:

جمله دوم به توان ۲: a^2

حالا این جملات رو با هم جمع می‌کنیم و هواسمون هست که چون علامت جمله های توی پرانتز منفیه، جمله دوم ما باید علامتش منفی باشه:

$$4x^2 - 4ax + a^2$$

در این جلسه ما با اتحاد مربع آشنا شدیم که خیلی مهم و کاربردی، پس فوب هفظش کنید:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تجزیه عبارت‌های جبری

سال گذشته ما با یکی از روش‌های تجزیه عبارت‌های جبری آشنا شدیم، در این قسمت ابتدا روش سال گذشته رو مرور می‌کنیم و بعد تجزیه کردن عبارت‌های جبری رو به کمک اتحادها یاد می‌گیریم.

روشی که سال گذشته باهاش آشنا شدیم فاکتورگیری هست، یعنی ما باید قسمتی که بین جملات داده شده مشترک هست رو پیدا کنیم و از جملات بیرون بکشیم. این کار رو با دو روش انجام می‌دیم.

فرض کنید به ما گفته شده عبارت زیر رو تجزیه کنید:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 =$$

با دو روش این عبارت رو تجزیه می‌کنیم. از هر روشی که دوست دارید می‌تونید استفاده کنید:

روش اول:

گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱: همه جملات رو کاملا باز می‌کنیم، به صورت زیر:

$$9a^2b^4 = 3 \times 3 \times a \times a \times b \times b \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = 3 \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b$$

گام ۲: دونه دونه نگاه می‌کنیم ببینیم بین خط بالا و پایین چی مشترکه، و برای اینکه بعدا به اشتباه نیفتیم، هر چیز مشترکی که پیدا کردیم از بالا و پایین خط می‌زنیم.

مثلا:

بالا ۳ داریم، پایین هم ۳ داریم، پس ۳ رو می‌نویسیم و از بالا و پایین خطش می‌زنیم:

3

$$9a^2b^4 = \cancel{3} \times 3 \times a \times a \times b \times b \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = \cancel{3} \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b$$

بالا دوباره ۳ داریم ولی پایین نداریم، پس نمی‌نویسیم، بالا a داریم، پایین هم داریم:

3a

$$9a^2b^4 = \cancel{3} \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times b \times b \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = \cancel{3} \times 5 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times b \times b$$

دوباره بالا a داریم و پایین هم داریم، پس می‌نویسیم و خطش می‌زنیم:

3aa

$$9a^2b^4 = \cancel{3} \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times b \times b \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = \cancel{3} \times 5 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times b \times b$$

بالا b داریم، پایین هم b داریم، پس می‌نویسیم و فکت می‌زنیم:

$$3aab$$

$$9a^2b^4 = \cancel{3} \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = \cancel{3} \times 5 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times \cancel{b} \times b$$

باز هم بالا b داریم، پایین هم داریم:

$$3aabb$$

$$9a^2b^4 = \cancel{3} \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \times b \times b$$

$$15a^3b^2 = \cancel{3} \times 5 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times \cancel{b} \times b$$

دیگه هیچ عامل مشترکی بین این دو تا نداریم.

گام ۳: عاملهای مشترکی رو که به دست آورده بودیم، پشت پرانتز می‌نویسیم و هر کدوم از چیزایی که توی ردیف اول و دوم فکت نفوردن رو داخل پرانتز با علامت نفورده می‌نویسیم:

$$3aabb(3bb + 5a)$$

جمله ای که پشت پرانتز نوشته میشه، ب a a دو جمله ای هست که با هم جمع شدن یا به عبارت ساده تر:

$$3a^2b^2(3b^2 + 5a)$$

روش دوم:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 =$$

گام ۱. آنگه هر دو عبارت عدد داشتن، ب a a اون دو عدد رو می‌نویسیم.

اینجا ب ۴ ۴ دو عدد ۹ و ۱۵ چند میشه؟ ۳. پس فعلا ۳ رو می نویسیم:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3$$

گام ۲. حروف انگلیسی رو با کمترین توانی که توی جملات دارن می نویسیم.

حرف بعدی که داریم a هست، اون رو می نویسیم و نگاه می کنیم ببینیم کمترین توانی که بین دو تا جمله داره چیه؟

اینجا توی جمله اول توان ۲ داره و توی جمله دوم توان ۳، پس کمترین توانش ۲ میشه. a رو با توان ۲ می نویسیم:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3a^2$$

حرف بعدی b هست، کمترین توانش چیه؟ ۲

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3a^2b^2$$

تا اینجا ما تونستیم جمله مشترک رو بین این دو جمله پیدا کنیم. این جمله ای که به دست آوردیم در واقع ب ۴ ۴ دو جمله ای هست که با هم جمع شدن.

گام ۳. بعد از جمله مشترک پرانتز رو با می کنیم و چیزایی که باقی موندن رو می نویسیم:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3a^2b^2($$

از جمله اول پیا مونده؟ عددش ۹ بوده که ما سه تاش رو برداشتیم پس ۳ از عدد باقی می مونه

a رو می فوایم بنویسیم، توانش اول چند بوده؟ ۲

چند تاش رو برای جمله مشترک برداشتیم؟ ۲ تاش رو. پس از توانهای a چیزی باقی نمونه

b رو میفویایم بنویسیم، توانش چند بوده؟ ۴

برای جمله مشترک چند تاش رو برداشتیم؟ ۲ تا

چند تاش باقی می‌مونه؟ ۲ تا پس باید داخل پرانتز b^2 رو هم داشته باشیم.

بنابراین از جمله اول $3b^2$ باقی مونه بود که توی پرانتز می‌نویسیمش:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3a^2b^2(3b^2 +$$

جمله دو^م به عدد ۱۵ داشته (یعنی ۳ ضرب در ۵) که ۳ تاش رو برای جمله مشترک برداشتیم پس ۵ ازش باقی می‌مونه. ۵

a^3 داشتیم که دو تا از توانهاش رو برای جمله مشترک برداشتیم، پس ۱ از توانش باقی می‌مونه. a^1

b^2 داشتیم که هر دو تا توان برای جمله مشترک رفته، پس چیزی از b باقی نمی‌مونه
بنابراین داریم:

$$9a^2b^4 + 15a^3b^2 = 3a^2b^2(3b^2 + 5a)$$

تجزیه به عبارت، انواع دیگه ای هم داره و یکی از اونها تجزیه با کمک اتحادهای جبری.
یعنی چی؟

یعنی اینکه به جمله به ما میدن و ما باید به اتحاد جبری توی اون جمله تشفیص بدیم.

مثال:

$$x^2 + 6x + 9 =$$

این عبارت شبیه روشهایی که در بالا معرفی کردیم تجزیه نمیشه، چون این سه تا جمله، هیچ قسمت مشترکی با هم ندارن. پس باید بریم سراغ اتحادها. میفوییم یاد بگیریم که چطوری به اتحاد مربع رو تشفیص بدیم.

چطوری اتحاد مربع رو
تشفیص بدیم؟

گام ۱. باید به دنبال دو تا جمله باشیم که به توان ۲ رسیده باشن.

در سوال بالا این جملات رو داریم؟

بله، یکی x^2 و دیگری ۹ که می‌دونیم برابر 3^2 هست.

گام ۲. جملات به دست اومده رو بدون توان ۲ می‌نویسیم.

پس به جمله داریم که x هست (بوش به دلفواه می‌گیم جمله اول)

و به جمله هم داریم که ۳ هست (بوش به دلفواه می‌گیم جمله دوم)

گام ۳. دو برابر جمله اول در جمله دوم رو می‌نویسیم، آگه این جمله رو هم داشته باشیم، اتحاد ما کامل میشه.

در اینجا دو برابر جمله اول در جمله دوم همیشه:

$$2 \times 3 \times x = 6x$$

که این جمله هم در عبارت $x^2 + 6x + 9$ وجود دارد، پس مطمئن میشویم که این جملات با هم اتحاد مربع رو تشکیل میدن.

گام ۴. جمله اول و دوم رو داخل پرانتز با هم جمع می‌کنیم و پرانتز رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$(x + 3)^2$$

بنابراین تونستیم جمله داده شده رو به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

مثال بعد:

$$8ax^2 + 24axy + 18ay^2$$

با به نگاه به جملات متوجه میشویم که بین این سه جمله، جمله مشترک داریم.

پس با توجه به یکی از دو روشی که گفتیم، جملات رو تجزیه می‌کنیم:

$$2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) =$$

آیا جملات داخل پرانتز یک اتحاد رو تشکیل میدن؟

گام ۱. باید به دنبال دو تا جمله باشیم که به توان ۲ رسیده باشن.

$$9y^2, 4x^2$$

گام ۲. جملات به دست اومده رو بدون توان ۲ می نویسیم.

$$3y \text{ و } 2x$$

گام ۳. دو برابر جمله اول در جمله دوم رو می نویسیم، آگه این جمله رو هم داشته باشیم، اتحاد ما کامل میشه.

در اینجا دو برابر جمله اول در جمله دوم میشه:

$$2 \times 3y \times 2x = 12xy$$

که این جمله هم در عبارت $4x^2 + 12xy + 9y^2$ وجود داره، پس مطمئن میشیم که این جملات با هم اتحاد مربع رو تشکیل میدن.

گام ۴. جمله اول و دوم رو داخل پرانتز با هم جمع می کنیم و پرانتز رو به توان ۲ می رسونیم:

$$(2x + 3y)^2$$

به جای پرانتز، این عبارت رو می نویسیم:

$$2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a(2x + 3y)^2$$

این عبارت رو هم تجزیه کردیم 😊

نکته مهم: در گام سوم، آگه دو برابر جمله اول در جمله دوم، با علامت منفی توی عبارت وجود داشت، باید در گام چهارم علامت داخل پرانتز رو منفی بنذاریم.

حل تمرین صفحه ۱۵

عبارت جبری و اتحاد

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3 - \left(\frac{1}{2}m\right)^2(-2m)^3$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$
ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y - x) - (y - 1)]$

الف:

اول پرانتزها رو به توان می‌رسونیم:

$$(-5m)^2 = 25m^2$$

$$(-2m)^3 = -8m^3$$

$$\left(\frac{1}{2}m\right)^2 = \frac{1}{4}m^2$$

باگذاری می‌کنیم:

$$(25m^2)(-8m^3) - \left(\frac{1}{4}m^2\right)(-8m^3) =$$

پرانتزها رو در هم ضرب می‌کنیم و حاصل رو با هم جمع می‌کنیم:

$$(25m^2)(-8m^3) - \left(\frac{1}{4}m^2\right)(-8m^3) = -200m^5 + 2m^5 = -198m^5$$

یه راه دیگه هم اینه که از جمله $-8m^3$ فاکتور بگیریم و بعد ساده کنیم.

ب: ابتدا علامت منفی رو در تک تک جملات پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - (a^3 - 9b^3 - 11c^3) =$$

$$7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - a^3 + 9b^3 + 11c^3 =$$

حالا جملات متشابه رو با هم جمع می‌کنیم:

$$7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - a^3 + 9b^3 + 11c^3 = 6a^3 + 5b^3 + 16c^3$$

ج:

در اینجا دو تا پرانتز که شبیه به هم هستن در هم ضرب شدن. از دو راه می‌تونیم جواب رو به دست بیاریم.

راه اول اینه که تک تک جملات پرانتز اول رو در تک تک جملات پرانتز دوم ضرب کنیم و جملات رو با هم جمع کنیم.

راه دوم اینه که با استفاده از اتحاد مربع جواب رو به دست بیاریم:

$$(x^m - 1)(x^m - 1) = (x^m - 1)^2$$

$$(x^m - 1)^2 = (x^m)^2 - 2(x^m)(1) + (1)^2 = x^{2m} - 2x^m + 1$$

د:

اول جواب داخل کروشه رو به دست میاریم:

$$(y - x) - (y - 1) = y - x - y + 1 = -x + 1$$

حالا این مقدار رو جاگذاری می‌کنیم:

$$x - [(y - x) - (y - 1)] = x - (-x + 1) = x + x - 1 = 2x - 1$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.